Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
Metody analizy danych
923
ISSN 1898-6447
Zesz. Nauk. UEK, 2013; 923: 37–45
DOI: 10.15678/ZNUEK.2013.0923.03

Jan Tatar
Katedra Matematyki
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Modele wskaźnikowe rynku kapitałowego wykorzystujące funkcję regresji wektorów losowych

Streszczenie

Jedną z ważniejszych kategorii modeli rynku kapitałowego stanowią modele wskaźnikowe. Wyrażają one liniową zależność stóp zwrotu z konkretnych (pojedynczych) aktywów od wybranego zestawu czynników. Czynnikami tymi są na ogół stopy zwrotu odpowiednio konstruowanych portfeli; mogą nimi być np. wybrane indeksy giełdowe.

Kluczowe znaczenie w modelach wskaźnikowych mają współczynniki wrażliwości modelowanej stopy zwrotu na zmiany wybranych czynników. Współczynniki te znane są w teorii i praktyce finansów jako tzw. współczynniki β, a jedną z metod ich wyznaczania jest analiza regresji.

We wcześniejszych pracach autor wykazał, że możliwa jest jednoznaczna konstrukcja funkcji regresji dla dwóch wektorów losowych niekoniecznie o tych samych wymiarach. Wynik ten w niniejszym opracowaniu stanowi dogodny punkt wyjścia do uogólnienia postaci modeli wskaźnikowych, na przypadek gdy wektor wybranych stóp zwrotu jest funkcją innego wektora czynników (np. wektora stóp zwrotu z innych aktywów). Uzyskany w ten sposób współczynnik β z oczywistych powodów będzie miał postać macierzową.

Słowa kluczowe: potęga wektora, momenty rozkładu, funkcja regresji, modele wskaźnikowe.

1. Wprowadzenie

Podstawowym pojęciem, na którym opiera się propozycja przedstawiona w niniejszym opracowaniu, jest potęga wektora w przestrzeni Hilberta zaproponowana m.in. w pracach [Tatar 1993 i 1996b]. Przypomnijmy, że jeżeli $(V, +, \cdot)$ jest dowolną przestrzenią Hilberta nad ciałem skalarów R z iloczynem skalarnym $\langle \bullet | \bullet \rangle : VxV \to R$ oraz jeżeli $v \in V$ i $k \in N_0 = N \cup \{0\}$ to k-tą potęgę wektora v definiujemy następująco:

Definicja

$$v^0 = 1 \in R$$

oraz

$$v^k = \begin{cases} v^{k-1} \cdot v & \text{dla } k\text{-nieparzystych} \\ \langle v^{k-1} | v \rangle & \text{dla } k\text{-parzystych} \end{cases}$$

Potęgowanie wektorów umożliwiło z kolei zdefiniowanie w naturalny sposób momentów łącznych dowolnego rzędu dowolnego wektora losowego $\xi : \Omega \to V$. W przypadku momentów zwykłych przyjęto bowiem $m_k = E(\xi^k)$, zaś w przypadku momentów centralnych $\mu_k = E[(\xi - m_1)^k]$. Uzyskane w ten sposób charakterystyki wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa istotnie różnią się od znanych w literaturze tzw. momentów mieszanych. Ponadto z własności potęgi wektora losowego wynika m.in. skalarny charakter momentów łącznych rzędu parzystego oraz wektorowy charakter momentów rzędu nieparzystego (por. np. [Tatar 1993, 1996b i 2009]). Własność ta uzasadnia (a niewątpliwie: sprzyja) wykorzystaniu odpowiednich momentów do konstrukcji miar położenia oraz miar rozproszenia rozkładów wielowymiarowych, takich jak np. wariancja, asymetria, kurtoza czy eksces (por. [Budny 2009, Budny i Tatar 2009, Tatar 1996a i 2006]).

Dla dwóch wektorów losowych $\xi : \Omega \to V$ oraz $\eta : \Omega \to V$ o wartościach w tej samej przestrzeni Hilberta zdefiniowano z kolei ich moment mieszany rzędu $k + l$ jako $m_{kl} = E(\xi^k \cdot \eta^l)$. Szczególny przypadek momentu mieszanego wektorów ξ i η, tzn. moment m_{11} nazwano ich kowariancją i przyjęto klasyczne oznaczenie cov(ξ, η).

W praktyce najczęściej wykorzystywanym przypadkiem przestrzeni Hilberta jest s-wymiarowa przestrzeń euklidesowa R^S z naturalnym (euklidesowym) iloczynem skalarnym. Dlatego kolejnym krokiem w rozwijaniu proponowanej koncepcji charakteryzacji wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa było sformułowanie pytania o własności łącznego rozkładu wektora (ξ, η), gdzie $\xi : \Omega \to R^n$ oraz $\eta : \Omega \to R^m$ również są wektorami losowymi niekoniecznie o tych samych wymiarach, tzn. niekoniecznie $n = m$. Ważnym zagadnieniem okazało się badanie wzajemnej zależności wektorów ξ i η. W tym kontekście rozważano w szczególności warunkowe wartości oczekiwane jednego z wektorów losowych przy pewnych założeniach czynionych o drugim z nich. Tak sformułowany problem w prosty sposób prowadził do regresji liniowej dwóch wektorów losowych o dowolnych wymiarach (por. [Budny i Tatar 2012, Najman i Tatar 2010, Osiewalski i Tatar 1999]). W pracy [Budny i Tatar 2012] udowodniono następujące dwa twierdzenia.

Twierdzenie 1

Jeżeli $X:\Omega \to R^n$ oraz $Y:\Omega \to R^n$ są wektorami losowymi spełniającymi warunki $D^2X < +\infty$, $D^2Y < +\infty$ oraz $D^2X \neq 0$, to wartość oczekiwana $E\left[(Y - aX - b)^2\right]$ osiąga minimum dla $a = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2X}$ oraz $b = EY - \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{D^2X}EX$.

Łatwo można zauważyć, że powyższe twierdzenie jest prostym uogólnieniem na przypadek wielowymiarowy znanego w literaturze sposobu dopasowywania metodą najmniejszych kwadratów prostej regresji dwóch jednowymiarowych zmiennych losowych. Podkreślmy jeszcze raz, że powyższe uogólnienie okazało się możliwe dzięki wykorzystaniu przypomnianej wcześniej koncepcji momentów łącznych.

Jeszcze dalej idącego uogólnienia dostarcza twierdzenie 2.

Twierdzenie 2

Niech $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m):\Omega \to R^m$ oraz $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n):\Omega \to R^n$ będą wektorami losowymi takimi, że $X_i, Y_j \in L^2(\Omega) = \left\{ f:\Omega \to \Re \int\limits_{\Omega} f^2 dP < +\infty \right\}$ oraz $\det \Sigma_X \neq 0$, przy czym Σ_X jest macierzą momentów rzędu drugiego (wariancji--kowariancji) wektora *X*.

Wówczas wartość oczekiwana $E\left[(Y - A\cdot X - b)^2\right]$ osiąga minimum dla $A = Kow(Y,X)\cdot \sum_X^{-1}$ oraz $B = EY - A\cdot EX$, gdzie:

$$Kow(Y,X) = \begin{bmatrix} E[(Y_1 - EY_1)(X_1 - EX_1)] & \cdots & E[(Y_1 - EY_1)(X_m - EX_m)] \\ E[(Y_2 - EY_2)(X_1 - EX_1)] & \cdots & E[(Y_2 - EY_2)(X_m - EX_m)] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E[(Y_n - EY_n)(X_1 - EX_1)] & \cdots & E[(Y_n - EY_n)(X_m - EX_m)] \end{bmatrix}.$$

2. Propozycja funkcji regresji finansowych wektorów losowych

Niech $r = (r_1, r_2, \ldots, r_m)^T:\Omega \to R^m$ będzie wektorową zmienną ryzyka (dokładniej: wektorem *m* zmiennych ryzyka), np. wektorem losowych stóp zwrotu z aktywów o numerach: 1, 2, …, m. W szczególności możemy przyjąć, że są to rynkowe losowe stopy zwrotu możliwe do osiągnięcia na akcjach spółek: $s_1, s_2, \ldots, s_m$.

Niech z kolei $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T : \Omega \to R^n$ będzie n-wymiarowym wektorem czynników ryzyka. Każdy z czynników f_i, dla $i = 1, 2, \ldots, n$, jest zatem jednowymiarową zmienną losową i może być interpretowany np. jako stopa zwrotu z wybranego indeksu rynkowego bądź jako inny czynnik (na ogół makroekonomiczny), którego wartości – zdaniem modelującego rynek – wpływają na realizacje wektora r, a więc także na wartości jego składowych r_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots, m$. Zakładamy ponadto, że macierz wariancji-kowariancji wektora f jest nieosobliwa, tzn. $\det \Sigma_f \neq 0$. Założenie to oznacza, że wariancja rozkładu wektora f w sensie Wilksa (za: [Morrison 1990]) jest niezerowa, czyli że rozkład n-wymiarowy nie jest w istocie rozkładem w podprzestrzeni o wymiarze mniejszym niż n. Jeszcze inaczej: nieosobliwość macierzy Σ_f oznacza liniową niezależność współrzędnych (składowych) wektora f.

Będziemy poszukiwać modelu liniowej regresyjnej zależności wektorów r i f, czyli modelu postaci:

$$r = B \cdot f + A + U, \tag{1}$$

gdzie: $A = [\alpha_i]_{m \times 1}$ i $B = [\beta_{ij}]_{m \times n}$ są macierzami rzeczywistymi odpowiedniego wymiaru; zaś $U = [u_i]_{m \times 1}$ jest m-wymiarowym wektorem losowym o zerowym wektorze wartości oczekiwanych spełniającym ponadto warunki:

$$\operatorname{cov}(f_i, u_j) = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \ldots, n;\ j = 1, 2, \ldots, m \text{ takich, że } i \neq j \tag{2}$$

oraz

$$\operatorname{cov}(u_i, u_j) = 0 \text{ dla } i, j \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ takich, że } i \neq j. \tag{3}$$

O ile f jest wektorem wspólnych czynników ryzyka dla wszystkich zmiennych ryzyka, to współrzędne wektora losowego U mogą być interpretowane jako tzw. czynniki specyficzne dla poszczególnych zmiennych ryzyka. Świadczą o tym powyższe założenia o braku skorelowania między różnymi czynnikami specyficznymi oraz między każdym z tych czynników a różniącymi się wskaźnikami (numerami) zmiennymi ryzyka. Innymi słowy, na każdą zmienną ryzyka może mieć wpływ tylko jeden specyficzny czynnik ryzyka (specyficzny właśnie dla danej zmiennej ryzyka).

Specyfikacja modelu (1) polega na znalezieniu postaci macierzy A oraz B. W tym celu wykorzystamy twierdzenie 2. Bezpośrednio z jego tezy wynika, że:

$$B = Kow(r, f) \cdot \sum\nolimits_f^{-1}, \tag{4}$$

gdzie $\sum_f^{-1}$ jest macierzą (stopnia n) odwrotną do macierzy $\sum_f$, zaś macierz $Kow(r, f)$ jest postaci:

$$Kow(r,f)=\begin{bmatrix} E[(r_1-Er_1)(f_1-Ef_1)] & \cdots & E[(r_1-Er_1)(f_n-Ef_n)] \\ E[(r_2-Er_2)(f_1-Ef_1)] & \cdots & E[(r_2-Er_2)(f_n-Ef_n)] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E[(r_m-Er_m)(f_1-Ef_1)] & \cdots & E[(r_m-Er_m)(f_n-Ef_n)] \end{bmatrix}_{m\times n}.$$

Wymiary macierzy $Kow(r,f)$ oraz $\sum_f$ zapewniają wykonalność mnożenia $Kow(r,f)\cdot\sum_f^{-1}$ i decydują o tym, że jego wynik jest macierzą stopnia $m\times n$, czyli $B = B_{m\times n}=[\beta_{ij}]_{m\times n}$.

Z tezy twierdzenia 2 otrzymujemy również postać macierzy A. Jest bowiem:

$$A = Er - B\cdot Ef. \tag{5}$$

Ponieważ Er (jako wektor wartości oczekiwanych współrzędnych wektora r) jest macierzą wymiaru $m\times 1$, B – macierzą wymiaru $m\times n$, oraz Er – macierzą wymiaru $n\times 1$, więc ostatecznie $A = A_{m\times 1}=[\alpha_{i1}]_{m\times 1}$, a to oznacza, że A jest wektorem m-wymiarowym.

Wobec uzyskanych w (4) oraz (5) postaci macierzy B i A poszukiwany model (równość (1)) przyjmuje postać:

$$r = Kow(r,f)\cdot\sum\nolimits_f^{-1}\cdot f + Er - Kow(r,f)\cdot\sum\nolimits_f^{-1}\cdot Ef + U. \tag{6}$$

Powyższa zależność jest równaniem macierzowym, więc w istocie otrzymaliśmy n równań takich, że dla każdego $i=1,2,\ldots,n$ jest:

$$r_i=\beta_{i1}\cdot f_1+\beta_{i2}\cdot f_2+\ldots+\beta_{im}\cdot f_m+\alpha_i+u_i, \tag{6'}$$

przy czym

$$\alpha_i = Er_i-\beta_{i1}\cdot Ef_1-\beta_{i2}\cdot Ef_2-\ldots-\beta_{im}\cdot Ef_m,$$

β_{ij} jest j-tym elementem i-tego wiersza macierzy B (dla każdego $j=1,2,\ldots,m$), zaś u_j jest i-tym czynnikiem specyficznym spełniającym założenia (2) oraz (3).

3. Przykład funkcji regresji wektorów losowych

Dotychczasowe ogólne rozważania zilustrujemy przykładem, który – przy założeniu niewielkich wymiarów wektorów r oraz f pozwoli lepiej zrozumieć zagregowane macierzowe związki, a ponadto – w rozważanym przypadku – wskaże na efektywną postać współczynników α i β.

Niech zatem $r=(r_1,r_2,r_3):\Omega\to R^3$ oraz $f=(f_1,f_2,f_3):\Omega\to R^2$ będą odpowiednio wektorami zmiennych i czynników ryzyka.

O wektorze czynników ryzyka zakładamy ponadto, że macierz jego momentów rzędu drugiego $\sum_f$ jest macierzą nieosobliwą, czyli:

$$\det\sum_f = \det\begin{bmatrix} Var\, f_1 & \operatorname{cov}(f_1, f_2) \\ \operatorname{cov}(f_2, f_1) & Var\, f_2 \end{bmatrix} = Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2 \neq 0.$$

Przy powyższych założeniach poszukujemy regresyjnego liniowego modelu

$$r = B \cdot f + A + U, \tag{1'}$$

gdzie:

$$B = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix},$$

przy czym: A i B są macierzami rzeczywistymi, a U jest wektorem losowym, którego współrzędne spełniają warunki: $E(U) = 0$, $\operatorname{cov}(f_i, u_j) = 0$ oraz $\operatorname{cov}(u_i, u_j) = 0$, dla $i \neq j$.

Wobec nieosobliwości macierzy $\sum_f$ istnieje macierz do niej odwrotna o postaci:

$$\sum\nolimits_f^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{Var\, f_2}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} & \dfrac{-\operatorname{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} \\ \dfrac{-\operatorname{cov}(f_2, f_1)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} & \dfrac{Var\, f_1}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} \end{bmatrix}.$$

Ponadto:

$$Kow(r, f) = \begin{bmatrix} \operatorname{cov}(r_1, f_1) & \operatorname{cov}(r_1, f_2) \\ \operatorname{cov}(r_2, f_1) & \operatorname{cov}(r_2, f_2) \\ \operatorname{cov}(r_3, f_1) & \operatorname{cov}(r_3, f_2) \end{bmatrix}.$$

Stąd na mocy tezy twierdzenia 2 mamy:

$$B = Kow(r, f) \cdot \sum\nolimits_f^{-1} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \\ \beta_{31} & \beta_{32} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\operatorname{cov}(r_1, f_1) \cdot Var\, f_2 - \operatorname{cov}(r_1, f_2) \cdot \operatorname{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_1, f_2) \cdot Var\, f_1 - \operatorname{cov}(r_1, f_1) \cdot \operatorname{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} \\ \dfrac{\operatorname{cov}(r_2, f_1) \cdot Var\, f_2 - \operatorname{cov}(r_2, f_2) \cdot \operatorname{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_2, f_2) \cdot Var\, f_1 - \operatorname{cov}(r_2, f_1) \cdot \operatorname{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} \\ \dfrac{\operatorname{cov}(r_3, f_1) \cdot Var\, f_2 - \operatorname{cov}(r_3, f_2) \cdot \operatorname{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} & \dfrac{\operatorname{cov}(r_3, f_2) \cdot Var\, f_2 - \operatorname{cov}(r_3, f_1) \cdot \operatorname{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\operatorname{cov}(f_1, f_2)]^2} \end{bmatrix} \tag{5'}$$

oraz

$$A = Er - B \cdot Ef = \begin{bmatrix} Er_1 - \beta_{11} \cdot Ef_1 - \beta_{12} \cdot Ef_2 \\ Er_2 - \beta_{21} \cdot Ef_1 - \beta_{22} \cdot Ef_2 \\ Er_3 - \beta_{31} \cdot Ef_1 - \beta_{32} \cdot Ef_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}.$$

Ostatecznie poszukiwany model (1') przyjmuje postać:

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{11} \cdot f_1 + \beta_{12} \cdot f_2 + \alpha_1 + u_1 \\ \beta_{21} \cdot f_1 + \beta_{22} \cdot f_2 + \alpha_2 + u_2 \\ \beta_{31} \cdot f_1 + \beta_{32} \cdot f_2 + \alpha_3 + u_3 \end{bmatrix}, \tag{6''}$$

gdzie dla $i = 1, 2, 3$:

$$\beta_{i1} = \frac{\mathrm{cov}(r_i, f_1) \cdot Var\, f_2 - \mathrm{cov}(r_i, f_2) \cdot \mathrm{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\mathrm{cov}(f_1, f_2)]^2},$$

$$\beta_{i2} = \frac{\mathrm{cov}(r_i, f_2) \cdot Var\, f_1 - \mathrm{cov}(r_i, f_1) \cdot \mathrm{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\mathrm{cov}(f_1, f_2)]^2},$$

$$\alpha_i = Er_i - \frac{\mathrm{cov}(r_i, f_1) \cdot Var\, f_2 - \mathrm{cov}(r_i, f_2) \cdot \mathrm{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\mathrm{cov}(f_1, f_2)]^2} \cdot Ef_1 -$$
$$- \frac{\mathrm{cov}(r_i, f_2) \cdot Var\, f_1 - \mathrm{cov}(r_i, f_1) \cdot \mathrm{cov}(f_1, f_2)}{Var\, f_1 \cdot Var\, f_2 - [\mathrm{cov}(f_1, f_2)]^2} \cdot Ef_2 .$$

4. Uwagi końcowe

Uzyskany w równaniu (6) – w przypadku szczególnym w równaniu (6'') – model jest, podobnie jak znane w literaturze finansowej modele wielowskaźnikowe (por. [Ross 1976, Sharpe 1963]), dogodnym narzędziem do badania zależności wybranych zmiennych ryzyka od ustalonego uprzednio zestawu czynników ryzyka. Tym razem możliwe staje się badanie tej zależności jednocześnie dla wszystkich zmiennych, a macierz (5) – w przykładzie: (5') – dostarcza stosunkowo prostego sposobu wyznaczania współczynników β. Ich interpretacja również jest prosta i naturalna: β_{ij} jest miarą wrażliwości i-tej zmiennej ryzyka (czyli r_i) na zmiany wartości j-tego czynnika ryzyka (czyli f_j), β_{ij} jest bowiem odpowiednią pochodną cząstkową funkcji $r_i = r_i(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, tzn. $\beta_{ij} = \dfrac{\partial r_i}{\partial f_j}$.

Podkreślmy jeszcze raz, że komentowany wynik uzyskano, wykorzystując nową koncepcję tzw. momentów łącznych wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa.

Zauważmy ponadto, że w przypadku szczególnym, gdy będziemy uwzględniać tylko jeden czynnik ryzyka f_1, to każde z równań (6') przyjmie postać $r_i = \beta_{i1} \cdot f_1 + \alpha_i + u_i$ (dla $i = 1, 2, \ldots, m$), czyli okaże się tożsame z zaproponowanym przez W.F. Sharpe'a [1963] jednowskaźnikowym modelem rynku kapitałowego.

Warto na koniec zapytać o postać uzyskanego modelu, w przypadku gdy – jak to czynią niektórzy autorzy (por. np. [*Rynki…* 2008]) – założymy brak skorelowania między każdymi dwoma czynnikami ryzyka, czyli że $\operatorname{cov}(f_i, f_j) = 0$, gdy $i \neq j$. Wówczas, co szczególnie wyraźnie widać w macierzy (5') przy założeniu $\operatorname{cov}(f_1, f_2) = 0$, współczynniki wrażliwości są postaci $\beta_{ij} = \dfrac{\operatorname{cov}(r_i, f_j)}{Var\, f_j}$.

Literatura

Budny K. [2009], *Kurtoza wektora losowego*, „Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu”, nr 78, seria: Ekonometria, nr 26.

Budny K., Tatar J. [2009], *Kurtosis of a Random Vector – Special Types of Distributions*, „Statistics in Transition – New Series”, vol. 10, nr 3.

Budny K., Tatar J. [2012], *Regresja liniowa z wykorzystaniem nowej definicji momentów wektorów losowych*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 892.

Morrison D.F. [1990], *Wielowymiarowa analiza statystyczna*, PWN, Warszawa.

Najman P., Tatar J. [2010], *Regresja wektorów losowych dla wielowymiarowego rozkładu normalnego* [w:] *Badania ekonometryczne w teorii i praktyce*, red. A.S. Barczak, Katowice.

Osiewalski J., Tatar J. [1999], *Multivariate Chebyshev Inequality Based on a New Definition of Moments of a Random Vector*, „Przegląd Statystyczny”, nr 2.

Ross S.A. [1976], *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, „Journal of Economic Theory”, vol. 59.

Rynki, instrumenty i instytucje finansowe [2008], red. J. Czekaj, PWN, Warszawa.

Sharpe W.F. [1963], *A Simplified Model for Port Folio Analysis*, „Management Science”, vol. 19.

Tatar J. [1993], *Moments of a Random Variable in a Hilbert Space*, „Discussion Paper”, nr 1, Cracow Academy of Economics (także w: „Przegląd Statystyczny” 1999, nr 2).

Tatar J. [1996a], *Nierówność Czebyszewa dla wielowymiarowych zmiennych losowych*, „Badania Operacyjne i Decyzje”, nr 2.

Tatar J. [1996b], *O niektórych miarach rozproszenia rozkładów prawdopodobieństwa*, „Przegląd Statystyczny”, z. 3–4.

Tatar J. [2006], *Półniezmienniki i momenty w charakteryzacji wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa* [w:] *Matematyka – język uniwersalny*, Księga jubileuszowa dla uczczenia 70. urodzin Profesora Tadeusza Stanisza, red. E. Smaga, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.

Tatar J. [2009], *Nowe charakterystyki warunkowych rozkładów wielowymiarowych*, Studia i Prace Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, nr 3.

Indicatory Models of the Capital Market that Use the Regression Function of Random Vectors

One of the more important categories of the capital market, indicatory models show the linear dependence of rate from specific (individual) assets on a selected set of factors. These factors are usually the profitability of appropriately constructed portfolios; these can include, for example, specific stock indexes. The coefficients of the sensitivity of the rates on the changes of specific factors are essential for the indicatory models. In financial theory and practice those coefficients are known as beta coefficients and one method of determining them is regression analysis.

In the previous works the author showed that construction of the regression function of two random vectors – not necessarily of the same dimensions – is possible. That result – in this paper – is a convenient starting point to generalising the indicatory model form for cases where the vector of selected repayment rates is a function of other vector factors (e.g. the repayment rate vector of other assets). The beta coefficient obtained in this way, for obvious reasons, will have a matrix form.

Keywords: power of a vector, moments of a distribution, regression function, indicatory models.