Zeszyty Naukowe Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

1 (937)

ISSN 1898-6447
Zesz. Nauk. UEK, 2015; 1 (937): 127–139
DOI: 10.15678/ZNUEK.2015.0937.0109

Agnieszka Rygiel
Katedra Matematyki
Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

Brak arbitrażu na rynkach z proporcjonalnymi kosztami transakcji*

Streszczenie

Celem pracy jest przedstawienie w ujednolicony i przejrzysty sposób różnych wyników dotyczących aspektu braku arbitrażu występującego przy modelowaniu rynków finansowych z proporcjonalnymi kosztami transakcji. Podane zostały kryteria charakteryzujące brak możliwości słabego oraz silnego arbitrażu w modelu rynku z czasem dyskretnym i skończonym horyzontem czasowym. W przypadku modelu rynku z czasem ciągłym sformułowane zostały warunki wystarczające dla braku prostego arbitrażu (tzn. arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych). Szczególna uwaga została poświęcona transakcjom bez możliwości krótkiej sprzedaży.

Słowa kluczowe: modele rynków finansowych, arbitraż, koszty transakcji, proste strategie inwestycyjne.

1. Wprowadzenie

Przedmiotem pracy są pewne aspekty związane z modelowaniem rynków finansowych. Rozpatrywane jest zagadnienie braku arbitrażu tzn. braku możliwości uzyskania zysku bez konieczności ponoszenia ryzyka straty. Kwestia

* Praca została wykonana w ramach badań finansowanych ze środków przyznanych Wydziałowi Finansów Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

probabilistycznej charakteryzacji braku arbitrażu należy do podstawowych zagadnień matematyki finansowej. Zagadnienia te były badane zarówno w przypadku czasu dyskretnego, jak i ciągłego. Model z czasem ciągłym i skończonym horyzontem czasowym jest uważany za podstawowe narzędzie analizy rzeczywistych rynków finansowych. Rozważa się strategie ciągłe, tzn. strategie inwestycyjne, w ramach których możliwa jest nieskończona liczba zmian portfela inwestycyjnego na skończonym przedziale czasu. Z praktycznego punktu widzenia takie strategie nie są realizowalne. Rozsądne wydaje się badanie uczciwości rynku w modelu dopuszczającym jedynie „proste" strategie inwestycyjne, czyli takie, które odpowiadają wykonaniu tylko skończonej liczby transakcji.

Celem pracy jest zaprezentowanie modelu rynku z proporcjonalnymi kosztami transakcji. Należy podkreślić, że rynki z kosztami transakcji z czasem ciągłym są przedmiotem intensywnych badań matematycznych (m.in.: [Guasoni, Rásonyi i Schachermayer 2008, 2010]). W pracy przedstawione są różne definicje braku arbitrażu oraz trudności dobrego zdefiniowania uczciwości rynku. Przytoczone są wyniki stanowiące uogólnienie pierwszego fundamentalnego twierdzenia wyceny do modelu z proporcjonalnymi kosztami transakcji. Podane są warunki dostateczne na „słaby" brak arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych zarówno z możliwością pożyczania papierów wartościowych, jak bez tej możliwości. Warunki te są sformułowane dla modelu jednowymiarowego, a następnie rozszerzone do przypadku wielowymiarowego. Na zakończenie przedstawiono wyniki charakteryzujące brak możliwości arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych poprzez wykorzystanie rezultatów Y. Kabanova, M. Rásonyi'ego i Ch. Strickera [2002] oraz P.G. Grigorieva [2005] dla modelu z czasem dyskretnym.

Szczególną uwagę skupiono na strategiach wykluczających możliwość pożyczania papierów wartościowych. Transakcje, w ramach których inwestor dokonuje sprzedaży papieru wartościowego w chwili zawarcia umowy sprzedaży niebędącego jego własnością, są przez ustawodawcę ograniczane lub zakazywane (w ramach GPW w Warszawie nie każdy inwestor ma możliwość dokonywania tego typu transakcji, jak również nie na wszystkich papierach wartościowych może być realizowana). Oprócz wprowadzenia kosztów transakcji oraz ewentualnego ograniczenia składu portfela (tzn. brak możliwości tzw. krótkiej sprzedaży) nie rezygnuje się z pozostałych założeń rynku doskonałego. Zakładamy, że rynek jest płynny, dostęp do informacji jest jednakowy dla wszystkich inwestorów, a ich samodzielne działania nie wpływają na cenę instrumentów.

2. Model rynku finansowego z proporcjonalnymi kosztami transakcji (przypadek dyskretny)

Zakładamy, że (Ω, F, P) jest przestrzenią probabilistyczną z filtracją $F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_T$. Rozważamy model rynku finansowego z czasem dyskretnym (tzn. zarówno potencjalne zmiany cen instrumentów, jak i transakcje odbywają się w chwilach $0, 1, 2, \ldots, T$) i skończonym horyzontem czasowym: $T < \infty$. Na rynku występuje d papierów wartościowych (akcji), których ceny w chwili t są opisywane przez nieujemny F_t-mierzalny wektor losowy $X_t : \Omega \to R^d$ oraz rachunek bankowy ze stopą procentową $r = 0$. Rozpatrujemy rynek z proporcjonalnymi kosztami transakcji reprezentowanymi przez współczynniki λ^j, μ^j ($\lambda^j > 0$, $\mu^j \in (0,1)$). Wartość $X_t^j(1+\lambda)$ rozumie się jako cenę, po której można dokonać zakupu j-tego instrumentu w chwili t, zaś $X_t^j(1-\mu)$ – jako cenę, po której można sprzedać j-ty instrument w chwili t. Strategią inwestycyjną nazywamy dowolny proces prognozowalny $(\varphi_t)_{t\in\{0, 1, \ldots, T\}}$ o wartościach w R^d. Zmienną losową φ_t^j interpretujemy jako liczbę jednostek j-tego instrumentu trzymanych w portfelu od chwili $t - 1$ do chwili t. Jeśli dodatkowo zażądamy, by $\varphi_t^j \geq 0$ dla każdego $j = 1, 2, \ldots, d$ oraz $t = 1, 2, \ldots, T$, to strategię φ będziemy nazywać strategią inwestycyjną bez możliwości krótkiej sprzedaży. Pomimo że strategia formalnie opisuje proces inwestowania jedynie w instrumenty ryzykowne (wektor losowy φ_t jest d-wymiarowy), to standardowe założenie, by strategia była samofinansująca się (tzn. bez dopływu środków spoza inwestycji oraz konsumpcji) determinuje pozycję na rachunku bankowym. Niech $\Delta\varphi_t^j = \varphi_t^j - \varphi_{t-1}^j$ oraz $(\Delta\varphi_t^j)^+$, $(\Delta\varphi_t^j)^-$ oznaczają odpowiednio część dodatnią i część ujemną przyrostu $\Delta\varphi_t^j$. Wówczas skład portfela inwestycyjnego po dokonaniu transakcji w chwili $t - 1$ (przy założeniu, że startujemy z pozycji zerowej) opisują równania:

$$\begin{cases} \varphi_t^0 = \sum_{j=1}^{d}[(1-\mu^j)\sum_{s=1}^{t}(\Delta\varphi_s^j)^- X_s^j - (1+\lambda^j)\sum_{s=1}^{t}(\Delta\varphi_s^j)^+ X_s^j] \\ \varphi_t^1 = \sum_{s=1}^{t}\Delta\varphi_s^1 \\ \vdots \\ \varphi_t^d = \sum_{s=1}^{t}\Delta\varphi_s^d \end{cases}$$

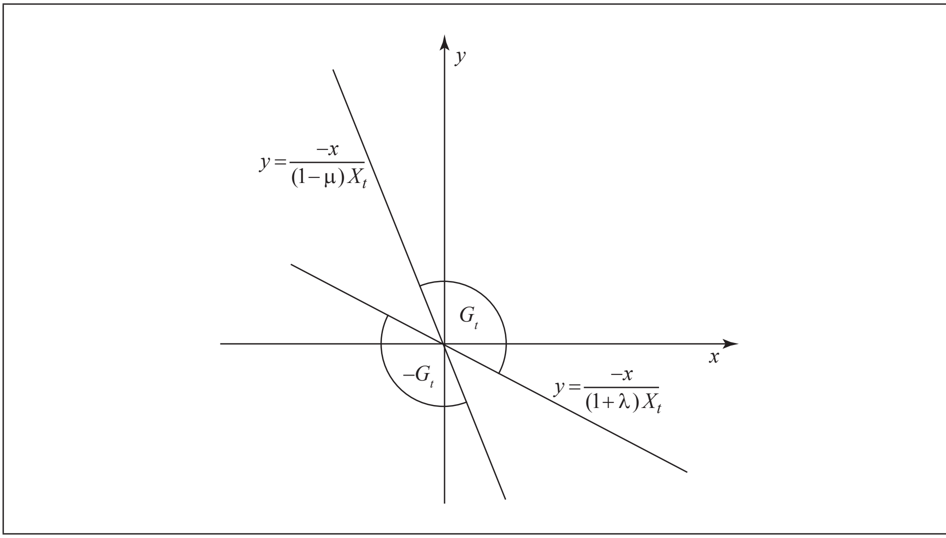
gdzie φ_t^0 oznacza ilość pieniędzy ulokowanych (pożyczonych) na rachunku bankowym. Interesujące są takie pozycje inwestycyjne, których wartość po dokonaniu spłaty ewentualnego zadłużenia na rachunku bankowym bądź giełdowym będzie nieujemna. Definiujemy zatem stożek losowy:

$$G_t = \left\{ (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d) \in R^{d+1} : \varphi_t^0 + \sum_{j=1}^{d} \left[(1-\mu^j)\,(\varphi_t^j)^+ X_t^j - (1+\lambda^j)\,(\varphi_t^j)^- X_t^j \right] \geq 0 \right\}.$$

Można powiedzieć, że G_t jest zbiorem pozycji nieujemnych, natomiast $(-G_t)$ – zbiorem pozycji osiągalnych w chwili t z pozycji zerowej. W przypadku gdy mamy do czynienia z jednym rodzajem instrumentu ryzykownego (dla $d = 1$), stożki te łatwo zilustrować (zob. rys. 1). W modelu rynku finansowego z kosztami transakcji pojęcie uczciwości rynku rozumiane jako brak arbitrażu, czyli możliwości uzyskania zysku z inwestycji o zerowej wartości początkowej bez ryzyka straty pieniędzy, ma kilka naturalnych uogólnień. Pierwszym z nich jest sytuacja, w której startując w chwili 0 z pozycji zerowej osiągamy w chwili T pozycję, która z dodatnim prawdopodobieństwem nie jest pozycją zerową, a jej wartość jest nieujemna z prawdopodobieństwem równym 1. Mówimy wtedy o słabym arbitrażu w chwili T. Jeśli zażądamy dodatkowo, by wartość pozycji końcowej była dodatnia z prawdopodobieństwem niezerowym, to powiemy o silnym arbitrażu w chwili T. Oznaczmy przez A^T zbiór pozycji możliwych do uzyskania w chwili T, przy zastosowaniu strategii samofinansujących się i startujących w chwili początkowej z pozycji zerowej. Wówczas brak możliwości słabego arbitrażu (czyli tzw. silny brak arbitrażu) można opisać przez warunek: $A_T \cap L^0(G_T, F_T) = \{0\}$. Natomiast słaby brak arbitrażu, tj. brak możliwości silnego arbitrażu, jest tożsamy z warunkiem: $A_T \cap L^0(G_T, F_T) \subset L^0(\partial G_T, F_T)$, gdzie ∂G_T oznacza brzeg zbioru G_T. Warto odnotować, że istotną rolę w dowodach twierdzeń charakteryzujących brak arbitrażu odgrywa fakt, że zbiór pozycji osiągalnych w chwili końcowej można wyrazić w postaci sumy: $A_T = \sum_{t=1}^{T} L^0(-G_t, F_t)$, gdzie $L^0(-G_t, F_t)$ jest rodziną F_t-mierzalnych wektorów losowych o wartościach w $(-G_t)$.

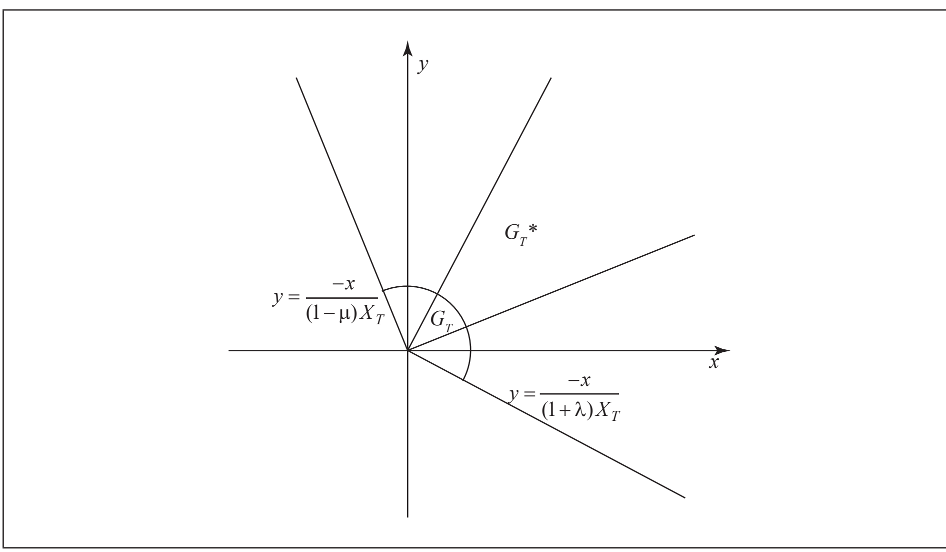
Podstawowy rezultat w matematyce finansowej, nazywany pierwszym fundamentalnym twierdzeniem wyceny, oznacza, że brak arbitrażu na rynku doskonałym jest tożsamy z istnieniem równoważnej miary martyngałowej. Zanim zostaną podane uogólnienia tego wyniku dla modelu z proporcjonalnymi kosztami transakcji, należy wprowadzić następujące oznaczenia: G_t^* oznacza stożek dualny do G_t, czyli $G_t^* = \left\{ v \in R^{d+1} \middle| \forall w \in G_t : \sum_{j=1}^{d+1} v_j w_j \geq 0 \right\}$;

$M^T(G^* \setminus \{0\})$ oznacza zbiór tych martyngałów $(Z_t)_{t \in \{0, 1, \ldots, T\}}$ (czyli procesów takich, że $E(Z_t) < \infty$ dla $t = 0, 1, \ldots, T$ oraz $E(Z_{t+1} \mid F_t) = Z_t$ dla $t = 0, 1, \ldots, T-1$), dla których $Z_t \in L^0(G_t^* \setminus \{0\}, F_t)$ dla dowolnego t.



Rys. 1. Zbiór pozycji nieujemnych i zbiór pozycji osiągalnych w chwili *t* (przypadek jednowymiarowy)

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Stożek pozycji nieujemnych w chwili *T* oraz stożek dualny (przypadek jednowymiarowy)

Źródło: opracowanie własne.

Rozpatrujemy przypadek, w którym Ω jest zbiorem skończonym.

Twierdzenie 2.1 (zob. [Kabanov i Safarian 2009]). Następujące warunki są równoważne:

1) $A_T \cap L^0(G_T, F_T) \subset L^0(\partial G_T, F_T)$,

2) $M^T(G^* \setminus \{0\}) \neq \emptyset$.

Łatwo pokazać, że warunek 2) oznacza istnienie miary $\tilde{P}$ równoważnej mierze P oraz d-wymiarowego procesu $\tilde{X}$ będącego martyngałem względem miary $\tilde{P}$ takiego, że $(1-\mu)X_t \leq \tilde{X}_t \leq (1+\lambda)X_t$. Zauważmy, że przy braku kosztów transakcji twierdzenie 2.1 pokrywa się z pierwszym fundamentalnym twierdzeniem wyceny.

Niech riG^* oznacza relatywne wnętrze stożka G^*. Podamy teraz warunek równoważny na silny brak arbitrażu.

Twierdzenie 2.2 (zob. [Kabanov i Safarian 2009]). Następujące warunki są równoważne:

1) $A_T \cap L^0(G_T, F_T) = \{0\}$,

2) istnieje $Z \in M^T(G^* \setminus \{0\})$ taki, że $Z_T \in L^0(riG_T^*, F_T)$.

Wprowadzenie pojęcia silnego i słabego braku arbitrażu w klasie strategii bez możliwości pożyczania papierów wartościowych wymaga ograniczenia zbioru pozycji nieujemnych oraz zbioru pozycji osiągalnych w chwili końcowej. Niech zatem

$$G_t^+ = \left\{(\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d) \in G_t : \varphi_t^i \geq 0, i = 1, \ldots, d\right\}$$

będzie zbiorem pozycji nieujemnych, zaś przez A_T^+ oznaczmy zbiór pozycji osiągalnych w chwili końcowej przy omawianym ograniczeniu. Wówczas powiemy, że w modelu zachodzi słaby brak arbitrażu bez możliwości krótkiej sprzedaży, jeśli $A_T^+ \cap L^0(G_T^+, F_T) \subset L^0(\partial G_T^+, F_T)$ oraz odpowiednio: silny brak arbitrażu bez możliwości krótkiej sprzedaży, jeżeli $A_T^+ \cap L^0(G_T^+, F_T) = \{0\}$.

Zauważmy, że zbiór $\sum_{t=1}^{T} L^0(Q_t^+, F_t)$, gdzie Q_t^+ oznacza zbiór pozycji osiągalnych z pozycji zerowej w chwili t przy zastosowaniu strategii bez możliwości pożyczania papierów wartościowych, tzn.

$$Q_t^+ = \left\{(\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d) \in (-G_t) : \varphi_t^i \geq 0,\ i = 1, \ldots, d\right\},$$

nie wyczerpuje wszystkich możliwych pozycji w chwili T. Powyższa suma stanowi jedynie zbiór końcowych pozycji generowanych przez strategie o niemalejącej liczbie akcji (zbiór $\sum_{t=1}^{T} L^0(Q_t^+, F_t)$ jest właściwym podzbiorem A_T^+). Zatem zastosowanie analogii do przypadku ogólnego, gdzie zbiór A_T można zapisać w postaci sumy algebraicznej stożków losowych nie jest możliwe.

W badaniu modeli z kosztami transakcji pojawia się również inny problem: brak równoważności między istnieniem strategii arbitrażowej w modelu wielookresowym a istnieniem możliwości arbitrażu w co najmniej jednym z podmodeli jednookresowych. Własność ta, prawdziwa w przypadku rynku bez kosztów transakcyjnych, została wykorzystana w większości dowodów pierwszego fundamentalnego twierdzenia wyceny arbitrażowej. Poniższy przykład (zob. [Rygiel i Stettner 2012]) ilustruje brak możliwości redukcji problemu uczciwości rynku do modelu jednookresowego w sytuacji, gdy rozważamy proporcjonalne koszty transakcji.

Przykład. Rozpatrujemy model dwuokresowy, jednowymiarowy ($T = 2$, $d = 1$) z dynamiką cen instrumentu ryzykownego zadaną przez zmienne losowe: $X_0 = 1$, $X_1 = X_0(1+\xi_1)$, $X_2 = X_1(1+\xi_2)$, gdzie $P(\xi_1 > -1, \xi_2 > -1) = 1$. Zakładamy, że

1) $1+\xi_i < \dfrac{1+\lambda}{1-\mu}$ z dodatnim prawdopodobieństwem dla $i = 1, 2$;

2) $P\left(\dfrac{1+\lambda}{1-\mu}(1-\delta) \le 1+\xi_i\right) = 1$ dla $\delta > 0$ takiego, że $(1-\delta)^2 > \dfrac{1-\mu}{1+\lambda}$.

Przyjmując zatem strategię polegającą na zakupie w chwili początkowej jednej akcji po cenie $1+\lambda$ ze środków pochodzących z pożyczki w banku oraz braku modyfikacji składu portfela inwestycyjnego w kolejnych chwilach, otrzymamy po likwidacji portfela w chwili końcowej kwotę: $-(1+\lambda)+(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\mu)$.

Zauważmy, że na mocy warunku 2) otrzymujemy

$$P\big(-(1+\lambda)+(1+\xi_1)(1+\xi_2) > 0\big) = 1,$$

więc opisana strategia jest silnym arbitrażem bez krótkiej sprzedaży. Jednocześnie każdy z podmodeli jednookresowych jest wolny od silnego arbitrażu w klasie strategii wykluczających krótką sprzedaż. Z uwagi na brak możliwości zadłużenia na rachunku giełdowym jedyną możliwą strategią jest kupno akcji w chwili początkowej i sprzedaż w chwili końcowej. Wartość takiej strategii w podmodelu: $0 \leftrightarrow 1$ opisuje zmienna losowa:

$$-(1+\lambda)+(1+\xi_1)(1-\mu),$$

zaś w podmodelu $1 \leftrightarrow 2$:

$$-(1+\lambda)(1+\xi_1)+(1+\xi_1)(1+\xi_2)(1-\mu).$$

Warunek 1) gwarantuje, że obie zmienne losowe przyjmują wartości ujemne z dodatnim prawdopodobieństwem.

3. Arbitraż w klasie prostych strategii inwestycyjnych

Zaczniemy od przedstawienia matematycznego modelu rynku finansowego z czasem ciągłym. W tym celu rozważamy przestrzeń probabilistyczną (Ω, F, P) z filtracją $(F_t)_{t\in[0,\,T]}$ spełniającą tzw. warunki zwykłe (tzn. zupełną i prawostronnie ciągłą). Niech $(X_t)_{t\in[0,\,T]}$ będzie d-wymiarowym adaptowanym procesem stochastycznym o ściśle dodatnich trajektoriach. Proces ten opisuje ewolucję cen d instrumentów ryzykownych. Rozważamy również proces deterministyczny, stale równy 1, który reprezentuje rachunek bankowy (z zerową stopą procentową).

Interesować nas będą tzw. proste strategie inwestycyjne, czyli takie, w ramach których dokonujemy skończoną liczbę transakcji na skończonym przedziale czasu. Klasę tego typu strategii można traktować jako swego rodzaju pomost między modelami dyskretnymi i ciągłymi. Zaletą takiego podejścia, wobec modeli z czasem dyskretnym, jest możliwość rozważania strategii w ramach, których liczba transakcji w ograniczonym czasie nie jest ograniczona z góry. Ponadto transakcje mogą być dokonywane w dowolnym momencie, rynek jest bowiem obserwowany w sposób ciągły. Sens rozważania prostych strategii jest ściśle związany z modelami rynku z kosztami transakcji. Wprowadzenie w klasycznym modelu Blacka-Scholesa kosztów transakcji prowadzi do sytuacji, w której jedynymi strategiami, które nie generują nieskończonych kosztów transakcji, są strategie typu „buy-and-hold". Ponadto proste strategie inwestycyjne wydają się lepiej oddawać rzeczywiste zachowania inwestorów na rynku.

Prostą strategię inwestycyjną definiujemy zatem jako d-wymiarowy proces $\Theta = (\Theta_t)_{t\in[0,\,T]}$ postaci $\Theta_t = \sum_{i=1}^{n-2} \theta_i \chi_{(\tau_i,\tau_{i+1}]}(t) + \theta_{n-1}\chi_{(\tau_{n-1},\tau_n)}(t) + \theta_n \chi_{\{T\}}(t)$, gdzie $n \geq 2$, zmienne losowe τ_i dla $i \in \{1, \ldots, n\}$ są czasami zatrzymania względem filtracji $(F_t)_{t\in[0,\,T]}$ takimi, że $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_{n-1} \leq \tau_n = T$ oraz θ_i są F_{τ_i}-mierzalnymi d-wymiarowymi wektorami losowymi dla $i \in \{1, \ldots, n\}$. Klasę takich strategii oznaczamy przez B_T. Ponadto przyjmujemy następującą konwencję: $(\tau_i, \tau_{i+1}] = \{\tau_i\}$, jeśli $\tau_i = \tau_{i+1}$ dla $i = 1, \ldots, n-2$ oraz $(\tau_k, \tau_{k+1}] = \{\tau_k\}$, jeśli $\tau_k = \tau_{k+1} = T$. Ciąg $(\tau_i)_{i\in\{1,\,\ldots,\,n\}}$ interpretujemy jako ciąg losowych momentów modyfikacji portfela, zaś fakt, że są to czasy zatrzymania względem filtracji $(F_t)_{t\in[0,\,T]}$, odzwierciedla prawidłowość, że decyzje inwestorów są stymulowane poprzez sygnały pochodzące z gromadzonych sukcesywnie informacji o rynku. Strategia ma charakter impulsowy; zmienna losowa θ_i^j oznacza liczbę jednostek j-tego instrumentu, która znajduje się w portfelu inwestycyjnym między chwilami τ_i i τ_{i+1}. Zmienna losowa θ_i^j może przyjmować zarówno dodatnie, jak i ujemne wartości.

Będziemy również rozważać sytuację, w której mamy do czynienia z ograniczeniem składu portfela inwestycyjnego polegającym na wykluczeniu możliwości krótkiej sprzedaży. Strategię $\Theta \in B_T$ nazwiemy prostą strategią inwestycyjną bez możliwości krótkiej sprzedaży, jeśli $\theta_i^j \geq 0$ dla dowolnego $i \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $j \in \{1, \ldots, d\}$. Klasę takich strategii oznaczamy przez B_T^+.

Zdefiniujmy proces dobrobytu związany z realizacją strategii $\Theta \in B_T$ jako:

$$W_t^{\Theta} = \sum_{j=1}^{d} \Bigg[\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i^j (X_{\tau_{i+1} \wedge t}^j - X_{\tau_i \wedge t}^j) - \lambda^j \sum_{i=1}^{n-1} X_{\tau_i \wedge t}^j (\theta_i^j - \theta_{i-1}^j)^+$$
$$- \mu^j \sum_{i=1}^{n-1} X_{\tau_i \wedge t}^j (\theta_i^j - \theta_{i-1}^j)^- - \lambda^j X_t^j (\theta_{\max\{i:\tau_i \leq t\}}^j)^- - \mu^j X_t^j (\theta_{\max\{i:\tau_i \leq t\}}^j)^+ \Bigg].$$

Wartość tego procesu jest sumą zysków pochodzących z inwestowania w poszczególne papiery wartościowe. Zysk generowany przez inwestycję w j-ty instrument finansowy składa się z części związanej ze zmianami cen instrumentu w kolejnych chwilach dokonywania transakcji:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i^j (X_{\tau_{i+1} \wedge t}^j - X_{\tau_i \wedge t}^j),$$

z części odpowiadającej kosztom ewentualnego zakupu:

$$\lambda^j \sum_{i=1}^{n-1} X_{\tau_i \wedge t}^j (\theta_i^j - \theta_{i-1}^j)^+$$

i kosztom potencjalnej sprzedaży:

$$\mu^j \sum_{i=1}^{n-1} X_{\tau_i \wedge t}^j (\theta_i^j - \theta_{i-1}^j)^-$$

w kolejnych losowych momentach do chwili t oraz ze składnika opisującego koszt likwidacji portfela w chwili t:

$$-\lambda^j X_t^j \theta_{\max\{i:\tau_i \leq t\}}^j,$$

jeśli $\theta_{\max\{i:\tau_i \leq t\}}^j < 0$ oraz

$$\mu^j X_t^j \theta_{\max\{i:\tau_i \leq t\}}^j,$$

jeżeli $\theta_{\max\{i:\tau_i \leq t\}}^j > 0$.

Można obecnie sformułować definicję silnego arbitrażu poprzez określenie warunków dotyczących wartości dobrobytu w chwili końcowej.

Definicja 3.1. Mówimy, że w modelu występuje możliwość silnego arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych, jeśli istnieje strategia $\Theta \in B_T$ taka, że $P(W_T^{\Theta} \geq 0) = 1$ oraz $P(W_T^{\Theta} > 0) > 0$. Jeżeli istnieje strategia należąca do klasy B_T^+, dla której wartość dobrobytu w chwili końcowej spełnia powyższe własności, to powiemy, że w modelu występuje silny arbitraż w klasie prostych strategii bez możliwości krótkiej sprzedaży.

Przejdźmy do określenia warunków, które wykluczają istnienie silnego arbitrażu w modelu z proporcjonalnymi kosztami transakcji w przypadku ogólnym oraz w sytuacji ograniczenia pożyczania papierów wartościowych. Dla uproszczenia notacji rozpoczniemy od przypadku jednowymiarowego, tzn. od modelu rynku, na którym występuje jeden rodzaj instrumentu ryzykownego.

Definicja 3.2. Niech $(X_t)_{t \in [0, T]}$ będzie adaptowanym procesem stochastycznym o ściśle dodatnich trajektoriach. X spełnia warunek (S) względem filtracji $(F_t)_{t \in [0, T]}$, jeśli dla dowolnego czasu zatrzymania $\tau \le T$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\sup_{\tau \le t \le T}\left|\ln\frac{X_t}{X_\tau}\right| < \varepsilon \,\middle|\, F_\tau\right) > 0, \quad P - p.n.$$

Z poniższego twierdzenia opartego na wyniku H. Sayita i F. Viensa [2011] wynika, że warunek (S) wyklucza istnienie silnego arbitrażu.

Twierdzenie 3.1 (zob. [Rygiel i Stettner 2012]). Jeśli proces $(X_t)_{t \in [0, T]}$ spełnia warunek (S), to model rynku finansowego jest pozbawiony możliwości silnego arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych.

Mówiąc intuicyjnie: jeśli trajektoria procesu cen akcji nie przekroczy pewnego poziomu powyżej i poniżej bieżącej ceny, to zysk wynikający z ewentualnych zmian cen akcji nie zrekompensuje poniesionych kosztów transakcji. Zatem jeżeli takie zdarzenie zachodzi z dodatnim prawdopodobieństwem, to nie ma szans na znalezienie strategii arbitrażowej. Warunek (S) oczywiście gwarantuje również słaby brak arbitrażu bez krótkiej sprzedaży (jeśli bowiem nie istnieje strategia arbitrażowa w klasie B_T, to tym bardziej nie znajdziemy jej w B_T^+).

Definicja 3.3. Powiemy, że proces $(X_t)_{t \in [0, T]}$ spełnia warunek (D) względem filtracji $(F_t)_{t \in [0, T]}$, jeśli dla dowolnego ciągu czasów zatrzymania $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots \ldots \le \tau_{n-1} \le \tau_n = T$ zachodzi:

$$P\left(\bigcap_{i<k}\left\{(1+\lambda)X_{\tau_i} > (1-\mu)X_{\tau_k}\right\}\right) > 0.$$

Twierdzenie 3.2 (zob. [Rygiel i Stettner 2012]). Jeśli proces $(X_t)_{t \in [0, T]}$ spełnia warunek (D), to w modelu występuje słaby brak arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych bez krótkiej sprzedaży.

Zauważmy, że zdarzenie $\{(1+\lambda)X_{\tau_i} > (1-\mu)X_{\tau_k}\}$ opisuje sytuację, w której cena, po której możemy dokonać zakupu w chwili τ_i przewyższa cenę sprzedaży w chwili τ_k. Oznacza to, że nie można skonstruować strategii arbitrażowej, dokonując transakcji dopuszczalnych (tzn. bez pożyczania na rachunku giełdowym) w chwilach τ_i i τ_k. Zatem warunek (*D*) oznacza, że żadna ze strategii postaci $\theta\chi_{(\tau_i,\tau_k]}$, gdzie $\tau_i \le \tau_k$ oraz $\theta \ge 0$, nie prowadzi do arbitrażu.

Warunki (*S*) i (*D*) można uogólnić do przypadku wielowymiarowego, tzn. modelu rynku, na którym występuje *d* rodzajów papierów wartościowych.

Definicja 3.4. Niech $(X_t)_{t\in[0,\,T]}$ będzie *d*-wymiarowym adaptowanym procesem stochastycznym o ściśle dodatnich trajektoriach. Mówimy, że *X* spełnia warunek (S^d) względem filtracji $(F_t)_{t\in[0,\,T]}$, jeśli dla dowolnego czasu zatrzymania $\tau \le T$ oraz dowolnego $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{d}\left\{\sup_{\tau\le t\le T}\left|\ln\frac{X_t^j}{X_\tau^j}\right|<\varepsilon\right\}\middle| F_\tau\right)>0, \quad P-p.n.$$

Twierdzenie 3.3 (zob. [Rygiel i Stettner 2012]). Jeśli proces $(X_t)_{t\in[0,\,T]}$ spełnia warunek (S^d), to wielowymiarowy model rynku finansowego jest pozbawiony możliwości silnego arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych.

Definicja 3.5. Powiemy, że proces $(X_t)_{t\in[0,\,T]}$ spełnia warunek (D^d) względem filtracji $(F_t)_{t\in[0,\,T]}$, jeśli dla dowolnego ciągu czasów zatrzymania $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \ldots$ $\ldots \le \tau_{n-1} \le \tau_n = T$ zachodzi:

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{d}\bigcap_{i<k}\left\{(1+\lambda)X_{\tau_i}^j > (1-\mu)X_{\tau_k}^j\right\}\right)>0.$$

Twierdzenie 3.4 (zob. [Rygiel i Stettner 2012]). Jeśli proces $(X_t)_{t\in[0,\,T]}$ spełnia warunek (D^d), to w modelu wielowymiarowym występuje słaby brak arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych bez możliwości krótkiej sprzedaży.

W dowodach powyższych twierdzeń korzysta się z pojęcia silnego arbitrażu w klasie prostych strategii według definicji 3.1. Można rozważać równoważną definicję arbitrażu wyrażoną w języku stożków losowych. Wystarczy określić, pełniący kluczową rolę w tym podejściu, zbiór pozycji osiągalnych w chwili końcowej przy zastosowaniu prostych strategii inwestycyjnych. Niech

$$A_T^B = \bigcup_{n\in N_2}\ \bigcup_{0\le\tau_1\le\ldots\le\tau_n\equiv T} A_T(\tau_1,\ldots,\tau_n),$$

gdzie: $A_T(\tau_1,\ldots,\tau_n)=\sum_{i=1}^{n}L^0(-G_{\tau_i},F_{\tau_i})$. Wówczas oba rodzaje arbitrażu definiujemy analogicznie do przypadku dyskretnego: w modelu występuje możliwość słabego arbitrażu, jeżeli $A_T^B \cap L^0(G_T,F_T)\ne\{0\}$ oraz silnego arbitrażu, jeżeli $A_T^B \cap L^0(R_+^{d+1},F_T)\ne\{0\}$ (można pokazać, że warunek $A_T^B \cap L^0(G_T,F_T)\subset L^0(\partial G_T,F_T)$ jest równoważny warunkowi: $A_T^B \cap L^0(R_+^{d+1},F_T)=\{0\}$).

Na zakończenie przedstawiono charakterystykę silnego i słabego braku arbitrażu w klasie prostych strategii inwestycyjnych, będącą uogólnieniem wyników z przypadku z czasem dyskretnym. Rezultaty dotyczą rynku skończonego (tj. przypadku, gdy zbiór Ω jest skończony), na którym występuje d papierów wartościowych. Oznaczmy przez $M_{\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}}(G^* \setminus \{0\})$ rodzinę tych martyngałów $Z = (Z_{\tau_i})_{i \in \{1, \ldots, n\}}$, dla których $Z_{\tau_i} \in L^0(G^*_{\tau_i} \setminus \{0\}, F_{\tau_i})$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

Twierdzenie 3.5. Następujące warunki są równoważne:

1) $A_T^B \cap L^0(G_T, F_T) = \{0\}$,

2) dla dowolnego $n \geq 2$ i dowolnego ciągu czasów zatrzymania $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq \ldots \ldots \leq \tau_{n-1} \leq \tau_n = T$ istnieje martyngał $Z \in M_{\{\tau_1, \ldots, \tau_n\}}(G^* \setminus \{0\})$ taki, że $Z_T \in L^0(riG_T^*, F_T)$.

Twierdzenie 3.6. Następujące warunki są równoważne:

1) $A_T^B \cap L^0(R^{d+1}, F_T) = \{0\}$,

2) istnieje martyngał $(Z_{\tau_i})_{i \in \{1, \ldots, n\}}$ taki, że $Z_{\tau_i} \in L^0(G^*_{\tau_i} \setminus \{0\}, F_{\tau_i})$ dla każdego $i = 1, \ldots, n$.

W modelu rynku, w którym rozważamy 1-wymiarowy proces cen, twierdzenie 3.6 można uogólnić do przypadku dowolnej przestrzeni stanów Ω. Dowód opiera się na wyniku z pracy Grigorieva [2005] podającego warunek równoważny dla braku silnego arbitrażu w modelu z czasem dyskretnym. Problem charakteryzacji braku arbitrażu w modelu dowolnym wielowymiarowym pozostaje otwarty.

Brak możliwości arbitrażu jest podstawowym warunkiem, który powinien być spełniony w modelowaniu rynku finansowego. W pracy przedstawiono przegląd wyników dotyczących warunków koniecznych i dostatecznych dla braku arbitrażu w modelach rynków finansowych z proporcjonalnymi kosztami transakcji. Rezultaty mogą posłużyć do dalszych badań.

Literatura

Grigoriev P. G. [2005], *On Low Dimensional Case in the Fundamental Asset Pricing Theorem with Transaction Costs*, „Statistics and Decisions", vol. 23, http://dx.doi.org/10.1524/stnd.2005.23.1.33.

Guasoni P., Rásonyi M., Schachermayer W. [2008], *Consistent Price Systems and Face-Lifting Pricing under Transaction Costs*, „The Annals of Applied Probability", vol. 18, http://dx.doi.org/10.1214/07-aap461.

Guasoni P., Rásonyi M., Schachermayer W. [2010], *The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Continuous Processes under Small Transaction Costs*, „Annals of Finance", vol. 6.

Kabanov Y., Rásonyi M., Stricker Ch. [2002], *No-arbitrage Criteria for Financial Markets with Efficient Friction*, „Finance and Stochastics", vol. 6, http://dx.doi.org/10.1007/s007800100062.

Kabanov Y., Safarian M. [2009], *Markets with Transaction Costs. Mathematical Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

Rygiel A., Stettner Ł. [2012], *Arbitrage for Simple Strategies*, „Applicationes Mathematicae", vol. 39, http://dx.doi.org/10.4064/am39-4-1.

Sayit H., Viens F. [2011], *Arbitrage-free Models in Markets with Transaction Costs*, „Electronic Communications in Probability", vol. 16, http://dx.doi.org/10.1214/ecp.v16-1671.

Absence of Arbitrage in Markets with Proportional Transaction Costs

The aim of the paper was to present in a clear and unified way various results concerning the absence of arbitrage in the modelling of financial markets with proportional transaction costs. The absence of weak and strict arbitrage opportunities criteria in a finite time horizon discrete time market model are given. Sufficient conditions for the absence of simple arbitrage (i.e. arbitrage over simple investment strategies) in a continuous time market model are presented. Special attention is devoted to transactions without short selling.

Keywords: financial markets models, arbitrage, transaction costs, simple trading strategies.